ANNÉE 1976

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE DE L'AIR

(Elèves Officiers de l'Air, Elèves Officiers Mécaniciens de l'Air, Elèves Officiers des Bases de l'Air)

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 3 heures)

Dans tout le problème, **R** *désigne l'ensemble des réels.*

I

1. — On définit la fonction Φ sur **R** par :

$$\begin{cases} \Phi(x) = \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \Phi(0) = 1 \end{cases}$$

Montrer qu'il existe une fonction φ indéfiniment dérivable sur **R** telle que $\Phi(x) = \varphi(x^2)$. (On pourra utiliser un développement en série entière).

2. — Intégrer l'équation différentielle :

$$(E_k) \qquad y'' + \frac{2y'}{x} + ky = 0 \qquad (x > 0, \quad k \text{ constante})$$

en posant $z = xy$.

Déterminer une solution qui tende vers 1 lorsque x tend vers zéro.

3. — Trouver toutes les fonctions u d'une variable réelle $r > 0$ telles que la fonction :

$$F(x, y, z) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

vérifie la relation :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + kF = 0$$

dans l'espace $\mathbf{R}^3$ privé de l'origine (k constante).

4. — Montrer que, pour toute valeur de k, il existe une unique fonction F satisfaisant aux conditions de la question 3 et dont le prolongement par $F(0, 0, 0) = 1$ définit une fonction indéfiniment différentiable dans l'espace $\mathbf{R}^3$.

.../...

II

On considère l'équation différentielle :

$$(A_k) \qquad xy'' + y' + kxy = 0 \qquad (k \text{ constante})$$

1. — Intégrer (A_0).

2. — Déterminer en utilisant un développement en série entière la solution w_k de (A_k) qui a pour limite 1 lorsque x tend vers zéro.

3. — Calculer $I_n = \int_0^{\pi} (\cos t)^{2n}\, dt$ en établissant une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.

Démontrer en utilisant un développement en série et en admettant formellement la permutation des deux opérations sommation de série et intégration que :

$$w_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \cos t)\, dt$$

III

Soient f et g deux fonctions continues sur $]0, +\infty[$. On suppose que g est bornée et que f est dérivable et vérifie la relation :

$$(1) \qquad f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \qquad (\forall\, x > 0)$$

1. — *a*) Montrer que f vérifie une relation de la forme :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \qquad M > 0$$

b) Montrer alors que $f(x)$ admet une limite λ lorsque x tend vers $+\infty$ et que pour tout nombre $a > 0$, on a :

$$\sup_{x \geqslant a} |x\,[f(x) - \lambda\,]| < +\infty$$

2. — Montrer qu'on obtient les mêmes résultats que dans la question 1 lorsqu'on suppose $f > 0$ et qu'on remplace la relation (1) par :

$$(2) \qquad f'(x) = f(x)\,\frac{g(x)}{x^2} \qquad (\forall\, x > 0)$$

3. — *a*) Former l'équation différentielle (D) déduite de (A_1) par le changement de fonction inconnue

$$z = y\sqrt{x}.$$

b) Soient u et v deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et vérifiant sur $]0, +\infty[$.

$$(3) \qquad \begin{cases} u > 0 \\ z = u \sin(x + v) \\ \dfrac{d}{dx}\,[u \sin(x + v)] = u \cos(x + v) \end{cases}$$

où z est solution de D.

Montrer que les fonctions u et v admettent chacune une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail